



TITLE:

非線形量子力学の構想 : Weinberg-Polchinski以降の展開について (非可換解析とミクロ・マクロ双対性)

AUTHOR(S):

中村, 勝弘; 水尻, 純平; 小倉, 達朗

---

CITATION:

中村, 勝弘 ...[et al]. 非線形量子力学の構想 : Weinberg-Polchinski以降の展開について (非可換解析とミクロ・マクロ双対性). 数理解析研究所講究録 2008, 1609: 36-48

ISSUE DATE:

2008-07

URL:

<http://hdl.handle.net/2433/140016>

RIGHT:

# 非線形量子力学の構想<sup>1</sup>

## — Weinberg-Polchinski 以降の展開について —

大阪市立大学工学研究科 中村勝弘<sup>2</sup>, 水尻純平, 小倉達朗

(2008 年 3 月 31 日受理)

### 1 はじめに

古典力学では物体の運動は決定論にしたがう。すべての初期条件がわかり物体間に働く力の性質がわかっているならば、物体の未来の運動は（ニュートン方程式を積分することで）完全に決まる。ニュートン方程式は非線形構造を持つので、初期の微小なズレに鋭敏で未来予想不可能なカオスを生成する。他方、ミクロな世界の法則である量子力学は、決定論を放棄している。コペンハーゲン解釈による定説によると、電子の確率振幅は決定論ルール（線形シュレーディンガー方程式）に従うが、測定に際しては不可避免的に波束の収縮がおこる（決定論の放棄）。したがって、初期の微小なズレに鋭敏なカオスなるものは原理的に生じようがない。

さて、「量子カオス」という名の研究が盛んになって久しい。しかし、特別なブレイクスルーを生み出すことなく歳月が経過してしまった。現在までの量子カオスの研究は、古典力学で扱うとカオスを示す系を量子化するとどのような興味深いことが得られるのかという、言わばカオスの量子論的徴候の研究にとどまっている。時間的に定常な状態に関しては、多数のエネルギー非交差に由来する準位統計（準位間隔に関するウィグナー分布）や周期軌道の量子版に相当する波動関数のスカー（傷跡）などの計算結果が報告され、量子ドット（量子ビリヤード）を用いてそれらを実験的に検証した仕事もたくさんある。

しかし、量子ダイナミクスについては、初期時間の振る舞いを除いては、カオスの徴候を示すものが何もない。詳しく言うと、波動関数の初期パターンは初期値に敏感な時空パターンになりえず、周期的あるいは擬似周期的時間発展を示すだけである。適切な表示（コヒーレント表示、伏見表示など）を採用してやると、プランク定数で決まる短い crossover time( $t_c$ ) までは、電子の波束のダイナミクス

<sup>1</sup>この原稿は、第1著者（中村）の京大数理解析研究集会「非可換解析とミクロ・マクロ双対性」での講演（2007年10月15日）および大阪市大での最終講義（2008年3月10日）に基づいている。

<sup>2</sup>現在の所属: Heat Physics Department, Uzbek Academy of Sciences, 28 Katartal Str., 700135 Tashkent, Uzbekistan; E-mail: nakamura@a-physics.osaka-cu.ac.jp

は、確かに古典カオスの振舞いを模倣することができる。しかし、時刻  $t_c$  以降はやはり周期的あるいは擬似周期的時間発展を示すだけである。これらのがっかりさせる結論はシュレーディンガー方程式の線形性により引き起こされる。ミクロな量子論の世界に、ソリトン、カオス、フラクタルなどの非線形現象を生起させ、文字どおりの「量子カオス」を実現するには、現在の量子ダイナミクスの枠組みを非線形化する必要があるだろう。

量子論の基礎方程式であるシュレーディンガー方程式を適用して、ビリヤード内の電子波束の量子ダイナミクスを考察してみよう。自由電子波束の波動関数  $\Psi$  は、位相速度が波数により異なる（つまり、分散性の）ために孤立波を保つことができず、ビリヤード壁に衝突する前にあつという間に崩壊する（図1参照）。その結果、電子波束はビリヤード運動およびカオス運動を示さない。しかし、電子波束は崩壊後も、シュレーディンガー方程式にしたがって運動している。何か不可解であるが、 $\Psi$  が実在波でなく確率波なので不自然なことはないと理解されている（コペンハーゲン解釈）。

しかし、たとえ、確率波であっても、壁との衝突や電子同士の衝突に際して安定な波束が得られないだろうか？ 安定な波束のカオス運動を生成できないのか？ 波束の収縮の仮定を可能な限り排除できないだろうか？ これらは、現存の量子力学の枠組への根源的な疑問である。1990 年前後にこの問題へのチャレンジが Weinberg[1, 2] と Polchinski[3] によってなされたが、実りある成果がでなかった。本稿では、彼等や中村（第1著者）[4] の構想をやや発展させてみよう。

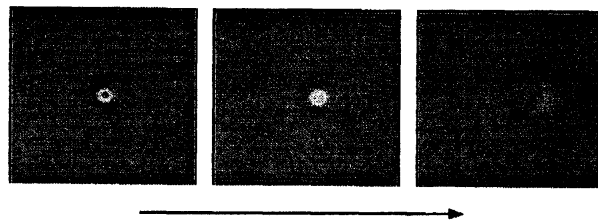


図 1: 自由波束の拡散

## 2 非線形量子力学の試み

通常の量子力学では、波動関数は決定論的なシュレーディンガー方程式に従うが、測定されると非決定論的に波束の収縮がおくとされている。この場合、測定される量子系と外部環境との結合のフレームは一義的なものではなく、連続測定によりシュレーディンガー方程式の決定論的性格も失われてしまう。しかし、非線形波動方程式は、首尾一貫して決定論的である。

量子ダイナミクスの非線形化には様々な試みがある。自由電子波束の時間変化は、周知のように

$$\Psi_{X,P}(x,t) \propto \exp\left(-\frac{1}{2A}\left(x - X - \frac{P}{m}t\right)^2\right) \exp\left(\frac{i}{\hbar}P\left(x - \frac{P}{m}t\right)\right) \quad (1)$$

で与えられる。波束の不安定性は、波束幅  $A$  の成長則で評価できる：

$$A = w_0^2 + i\frac{\hbar}{m}t \quad (2)$$

$m$  が電子質量の場合、 $\frac{\hbar}{m} \sim 1\text{cm}^2\text{s}^{-1}$  となるので、波束幅はわずか 1 秒後に巨視的なサイズ ( $\sqrt{A} \sim 1\text{cm}$ ) に達する (波束の崩壊)。しかし、 $m$  が非常に重くて  $1\text{g}$  であったと仮定すると、 $\frac{\hbar}{m} \sim 1 \times 10^{-27}\text{cm}^2\text{s}^{-1}$  となるので、宇宙年齢 ( $10^{27}\text{s} \sim 3 \times 10^{19}\text{years}$ ) ほどの時間が経過しても波束は崩壊しない (Omnes[5])。ところが、 $\Psi$  に依存するポテンシャルを導入することで、質量の enhancement と厳密に等価な効果が期待できる (増田俊平氏による [6])。  $\Psi$  に依存するポテンシャルを導入することはシュレーディンガー方程式に非線形項を導入することと等価である。これは、実は Kibble の構想 [7] を具体化したものになっている。波動関数を多成分複素ベクトル関数に拡張することで多粒子系の非線形シュレーディンガー方程式に一般化することもできる。この研究の詳細は別途公表の予定である。

本稿では、他の研究グループの仕事を紹介し、さらに簡単な非線形項をもつ非線形シュレーディンガー方程式の数値解析の結果 (我々の結果) を紹介しよう。ノルムを保存し、ガリレイ不変な非線形波動方程式の一般形は

$$i\hbar \frac{\partial \Psi}{\partial t} = -\frac{\hbar^2}{2m} \nabla^2 \Psi + V\Psi + F(|\Psi|^2)\Psi \quad (3)$$

(3) の右辺第 3 項は、多体効果によるものではなく、例え一個の自由電子の場合でもあらわれる非線形項であり、この関数の正体を巡って多くの研究がなされてきた。(3) は、波動関数のスカラー倍  $\Psi \rightarrow Z\Psi$  に対して不変ではなく、波動関数の「均一性」を破っている。しかし、方程式の形が具体的なので、興味深い結果が得やすい。以下では、 $g$  を非線形項の大きさをあらわすパラメータとして、ベキ級数型  $F(x) = g(x + c_1x^2 + c_2x^3 + \dots)$  と対数型  $F(x) = g \ln x$  の場合を考察しよう。

$F(|\Psi|^2) = g(|\Psi|^2 + c_1|\Psi|^4 + c_2|\Psi|^6 + \dots)$  の場合:

これは、非線形 Kerr 媒質 (傾斜指数を持つ光ファイバー) における非線形波動光学の基礎方程式を、そのまま、電子に対する波動方程式に読み替えることに相当する。 $c_1 = c_2 = \dots = 0$  で自由粒子 ( $V(\mathbf{r}) = 0$ ) を考えてみよう。空間 1 次元の場合の方程式は、ソリトン物理学でお馴染みの非線形シュレーディンガー方程式であり、安定な基本解としてソリトン解 (波束) を持つ。この波束は、自由粒子に対する通常の量子ダイナミクスと異なり、永久に崩壊せず、ソリトン間の衝突に際しても安定である。また、ソリトンの広がり電子のサイズとみなせば、系の特徴

的長さとは非線形項の大きさ  $g$  が確定する。最近のボーズ・アインシュタイン凝縮体 (BEC) の脈絡での研究によると、空間 2 次元以上の場合でも、係数  $g$  を高周波で時間的に振動させると、カピツァの倒立振り子と同じ原理で、ソリトン解 (波束) は安定化し、また、ソリトン (波束) 間の衝突に対しても安定である (衝突後、ソリトンの形が回復する) ことが指摘されている。なお、BEC の脈絡で、 $V(\mathbf{r})$  が調和ポテンシャルや光学格子型ポテンシャルの場合の研究が盛んであるが、ここでは言及しない。

$F(|\Psi|^2) = g \ln |\Psi|^2$  の場合:

このタイプの非線形項は、Bialynicki-Birula と Mycielski[8] により採用された。なぜ彼等是对数型の非線形項を採用したのだろうか? 今、互いに相互作用をしていない (充分離れている) 2 つの識別できる粒子 1 と 2 (たとえば、陽子と電子) を考えよう。個々の粒子の波動関数  $\Psi_k(\mathbf{r}_k, t)$  ( $k = 1, 2$ ) は方程式 (3)、具体的には

$$i\hbar \frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = \left( -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + V(\mathbf{r}_k, t) + F(|\Psi_k|^2) \right) \Psi_k \quad (4)$$

を充たす。ところで、粒子 1 と 2 の合成系の波動関数は直積  $\Psi_1 \Psi_2$  で表され、それは合成系の方程式

$$i\hbar \frac{\partial (\Psi_1 \Psi_2)}{\partial t} = \left( \sum_{k=1,2} \left( -\frac{\hbar^2}{2m_k} \nabla_k^2 + V(\mathbf{r}_k, t) \right) + F(|\Psi_1 \Psi_2|^2) \right) \Psi_1 \Psi_2 \quad (5)$$

を充たす。(4) と (5) が両立するための条件式は

$$F(|\Psi_1|^2) + F(|\Psi_2|^2) = F(|\Psi_1 \Psi_2|^2) \quad (6)$$

である。(6) は  $F(x) = g \ln x$  と選ぶことにより確かに恒等的に充たされる。対数型非線形項を持つシュレーディンガー方程式は、識別可能な多粒子系だけでなく同種粒子系の記述もできる利点を持っている。

さて、話を具体化するために、ベキ級数型非線形項の特別な場合 ( $c_1 = -\gamma, c_2 = \gamma^2, c_3 = -\gamma^3, \dots$ ) である飽和型非線形項  $gF(|\Psi|^2) = g \frac{|\Psi|^2}{1+\gamma|\Psi|^2}$  を考えよう。飽和型非線形項は、波束と壁の衝突時など、波動関数の密度が異常に高くなると非線形効果が効かなくなるメリットを有する。

このタイプの非線形項をもつ非線形シュレーディンガー方程式を考え、空間 2 次元のビリヤード内における波束のダイナミクスを数値的に考察してみよう。正方形ビリヤード内で運動する場合、ガウス型波束の幅は壁との衝突時に異常収縮するものの、おおむね初期の幅を維持している (図 2 参照)。

次に、スタジアム型のビリヤード内の波束のダイナミクスを考察してみよう。図 3 が示すように、曲率を持つ壁との衝突に際して波束の不安定化が生じないことがわかる。波束が崩れないので、スタジアム型ビリヤード内の複数回の衝突も可能

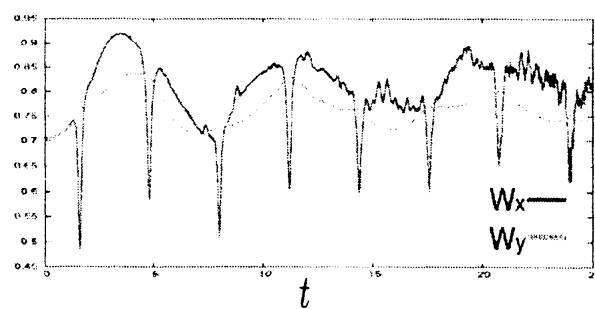


図 2: ガウス型波束の幅の時間変化。壁との衝突時に幅の異常収縮が生じている。

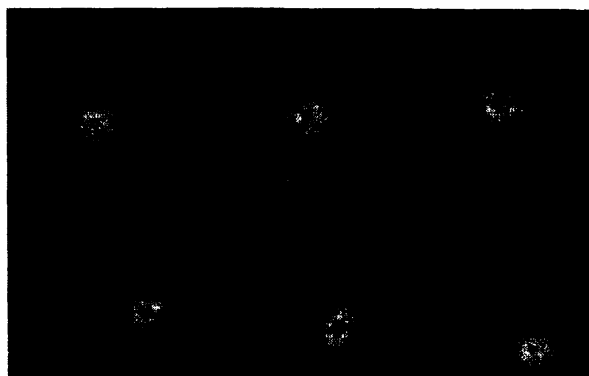


図 3: 曲率を持つ壁との衝突における波束の変化

である。実際、図4は、壁との4回目の衝突に対してもなおかつ波束が崩壊や拡散しないことを示している。もし、この安定性が多数回の衝突に対しても保証できるならば、正のリアプノフ指数で特徴づけられる波束のカオス運動も生成する。これは、まさしく文字通りの量子カオスである。このように、量子力学の基礎方程式を非線形シュレーディンガーに置き換えることで安定波束のビリヤード運動と(初期条件に鋭敏な)カオスが可能となる。

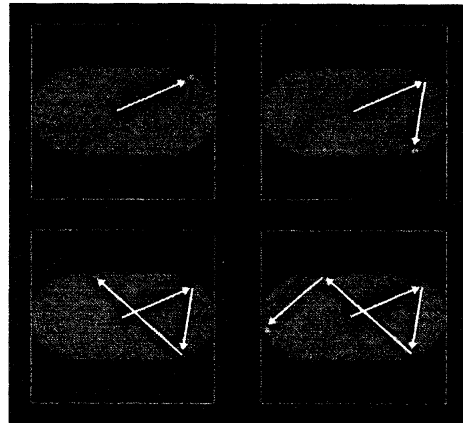


図4: スタジアム内でのビリヤード運動

さらに、この非線形シュレーディンガー方程式を用いて、波束を2重スリットの真中心に入射させてできる干涉縞を数値的に考察しよう[9]。数値シミュレーションでは分裂した波束が再結合し、位置を固定したスクリーン上に美しい干涉縞を形成することを示すことができる(図5参照)。

非線形項の大きさは波束の広がりに影響を与えるものの、スクリーン上の干涉縞ピークの間隔(ドブロイ波長だけできまる)に影響を与えない(図6参照)。波束を2重スリットの真中心から少しずれた方向に入射させると、スクリーン上の干涉縞の分布は左右非対称になる。しかし、干涉縞ピークの間隔は不変である。1回の観測に際しては、スクリーン上の存在確率のもっとも高いところに電子が見いだされる可能性が高い。したがって、スクリーン上に見いだされる電子の位置は、波束の入射方向に依存する。実際に Tonomura らの実験(1電子干涉の繰り返し実験)では、電子銃から次々に発射される1電子波束の方向は揺らいるので、スクリーン上で観測される電子の位置もばらつく。しかし、干涉縞ピークの間隔は不変なので、多数回の電子の入射に対して干涉縞はしだいに鮮明となる。これが Tonomura らの実験結果に対する、非線形量子力学による我々の新しい解釈である。ここでは、電子の粒子性と波動性の双対性のミステリーはほとんど消失する。

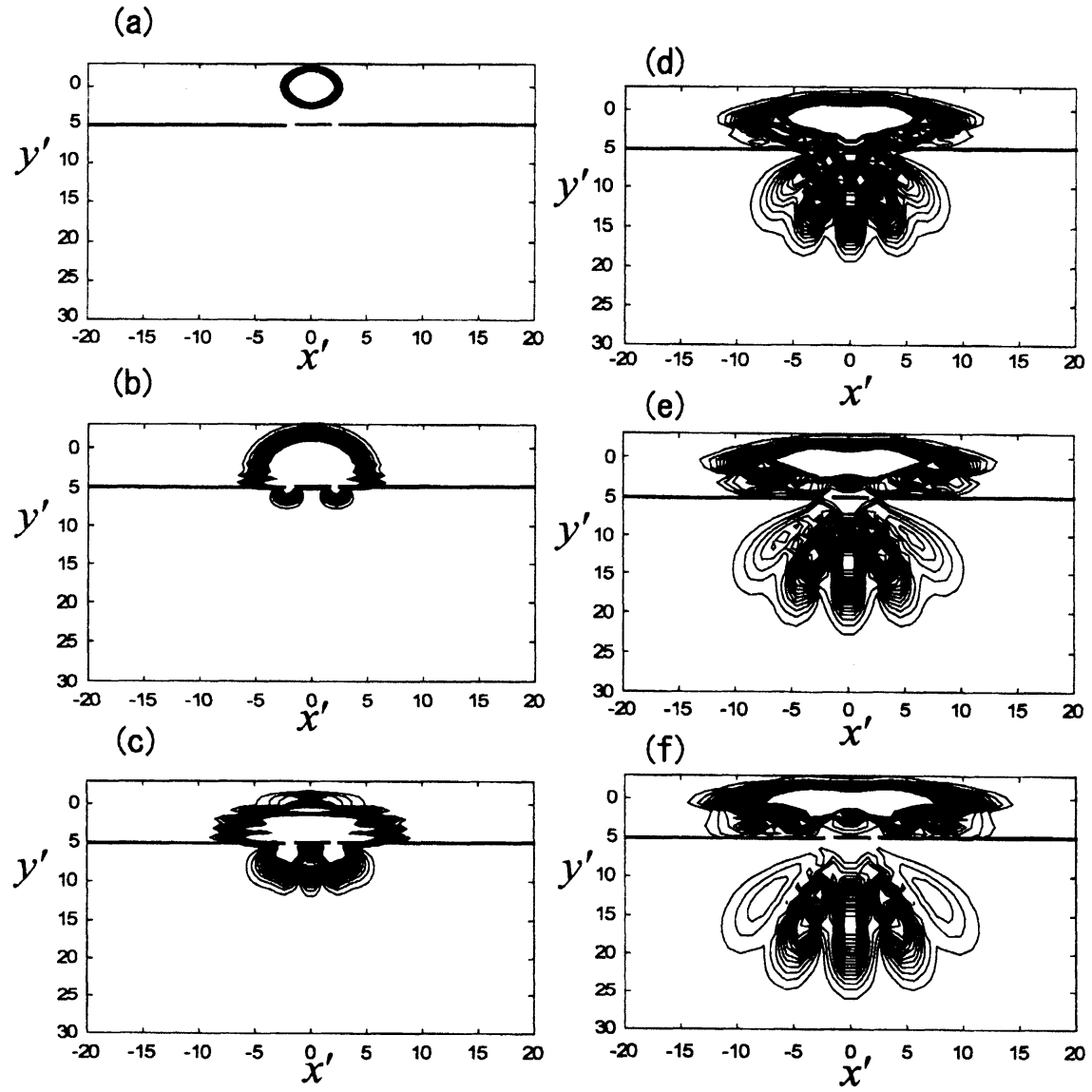


図 5: 波束の通過と干渉縞の形成。等高線の刻みはすべてのスナップショットに共通。



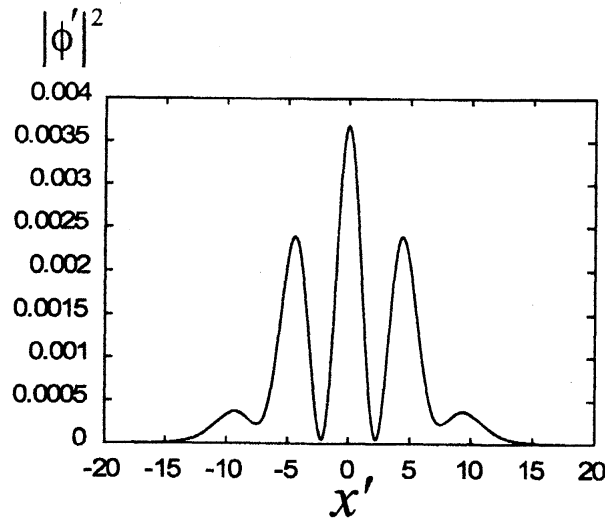


図 6: スクリーン上での干渉縞パターン

### 3 スピンに対する非線形量子力学とカオス

実験的検証を意識した量子力学の非線形化はワインバーグにより提案された。ワインバーグが着目したのは、米国・国立標準技術研究所 (NIST) のグループの実験結果 [10] で、ペニング捕獲されたベリリウムイオンの核スピンの一定の静的磁場を作用させた時の才差運動の振動数を磁気共鳴法を用いて継続的に測定すると、時間的に不規則な変化を示すという事実である（普通の量子力学では、振動数は一定であり、静的磁場の大きさで決まる（図 7 参照））。もちろん、振動数変化の振幅は平均値に比べて非常に小さいが、ワインバーグは、これを量子ダイナミクスの線形性の破れと直感した。ここでは、ワインバーグの非線形量子力学の概要を示すにとどめよう [1, 2]。本節では  $\hbar = 1$  とする。

(I) まず、複素状態関数をヒルベルト空間（有限次元でも OK）のベクトル  $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2, \dots, \Psi_N)^T$  で表す。（ $T$  は転置操作の意味。）また、通常の線形量子力学と同様に、 $\Psi$  のスカラー倍 ( $Z\Psi$ ) は  $\Psi$  と同じ状態を表すと約束する。彼は、これを「均一性」の条件と呼んでいる（Kibble は、これをスケール不変性と呼ぶ [7]）。

(II) 任意の物理量  $A$  に対して、その期待値を  $\Psi, \Psi^*$  について 2 次よりも大きな次数の非線形実数関数  $a(\Psi, \Psi^*)$  で記述されたとする。これは、通常の量子力学での実数期待値の二次形式  $\Psi_k^* A_{kl} \Psi_l$  ( $A_{kl}$  はエルミート行列；また、添字  $k$  や  $l$  については和をとる) の自然な拡張である。ただし、「均一性」の要請より、実数関数  $a$  は任意の形をとりえず

$$\Psi_k \frac{\partial a}{\partial \Psi_k} = \Psi_k^* \frac{\partial a}{\partial \Psi_k^*} = a$$

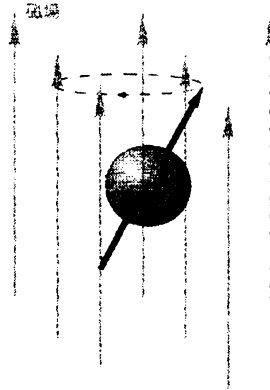


図 7: ラーマー歳差運動

を充たすものに限定される。次に、任意の物理量  $A$  と  $B$  に対応して、積の期待値を

$$a * b \equiv \frac{\partial a}{\partial \Psi_k} \frac{\partial b}{\partial \Psi_k^*}$$

で定義する。これも通常の二次形式  $\Psi_n^* A_{nk} B_{km} \Psi_m$  の拡張になっている。ただし、積をこのように定義すると、通常の量子力学と異なり、積に関する結合則が成立しなくなる。

(III) 続いて、無限小変換（例えば、無限小時間推進）に対する無限小増分を定義する。この変換に共役な物理量（例えば、ハミルトニアン）を  $A$  とし、波動関数  $\Psi$  の増分を

$$\epsilon \delta_a \Psi_k = -i\epsilon \frac{\partial a}{\partial \Psi_k^*} \quad (7)$$

で定義する。これも、通常の変換  $\epsilon \delta \Psi_k = -i\epsilon A_{kl} \Psi_l$  の自然な拡張になっている。この無限小変換に対して、別の任意の物理量  $B$  の期待値  $b(\Psi, \Psi^*)$  の増分は、

$$\begin{aligned} \epsilon \delta_a b &= \frac{\partial b}{\partial \Psi_k} \epsilon \delta_a \Psi_k + \frac{\partial b}{\partial \Psi_k^*} \epsilon \delta_a \Psi_k^* \\ &= i\epsilon \left( \frac{\partial a}{\partial \Psi_k} \frac{\partial b}{\partial \Psi_k^*} - \frac{\partial a}{\partial \Psi_k^*} \frac{\partial b}{\partial \Psi_k} \right) \\ &\equiv i\epsilon (a * b - b * a) \equiv i\epsilon [a, b] \end{aligned} \quad (8)$$

(8) の最後の等式はワインバーグの非線形量子力学の体系がディラック括弧式ではなくポアソン括弧式に基礎を置く非可換代数で記述されていることを示している。このため、結合則が破れる  $((a * b) * c \neq a * (b * c))$ 。

ワインバーグは、上記、(I)～(III) の公理を適用して、時間依存の基礎方程式を導いた。すなわち、ハミルトニアン  $H$  の期待値  $h$  を用いた恒等式  $\Psi_k(t + \epsilon) = \Psi_k(t) + \epsilon \delta_h \Psi_k(t)$  に (7) を代入すると、 $\Psi$  に対する時間依存の非線形シュレーディ

ンガー方程式

$$\frac{\partial \Psi_k}{\partial t} = -i \frac{\partial h}{\partial \Psi_k^*} \quad (9)$$

を得る。また、任意の物理量  $A$  の期待値  $a(\Psi, \Psi^*)$  の従う方程式は

$$\frac{\partial a}{\partial t} = -i[a, h] \quad (10)$$

となる。通常の量子力学では  $h = \Psi_k^* H_{kl} \Psi_l$  なので、ハミルトニアン  $h$  のベキ乗の期待値  $a_j = \Psi_k^* (H^j)_{kl} \Psi_l$  ( $j = 0, \dots, N-1$ ) が保存量である。このとき、自由度 ( $N$ ) と保存量の数が一致するので系は完全可積分である。このとき、 $N$  次元ヒルベルト空間で波動関数  $\Psi, \Psi^*$  は周期的あるいは、準周期的運動をする。しかし、(9), (10) で記述される非線形量子力学ではノルム  $n(\equiv \Psi_k^* \Psi_k)$  とハミルトニアン  $h$  は保存量であるが、 $(h * h) * \dots * h$  などは、(II) で述べたように積に関する結合則の破れのため保存量ではない。したがって、 $N(> 2)$  次元ヒルベルト空間を持つ系は非可積分となり、カオスが発生しうる。

$N = 2$  ( $\Psi = (\Psi_1, \Psi_2)^T$ ) の場合の非線形量子力学の具体例として、本節の最初に紹介した核スピンの才差運動を扱ってみよう。 $z$  方向の一定の静的磁場の強さを  $\xi$  としておこう。この時、ノルム  $n \equiv \Psi^\dagger \Psi = |\Psi_1|^2 + |\Psi_2|^2$  と  $a \equiv \frac{1}{2} \Psi^\dagger (I - \sigma_z) \Psi / n = |\Psi_2|^2 / n$  を用いて非線形ハミルトニアン  $h = \xi n \bar{h}(a)$  を採用してみよう ( $\sigma = (\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z)$  はパウリ行列)。ここで、 $\bar{h}(a)$  が  $a$  について非線形であるとする。 $\bar{h}(a)$  が線形のときは、線形ハミルトニアン (ゼーマンエネルギーの通常の表式 + 定数項)  $h = \xi |\Psi_2|^2$  に帰着する。(9) より

$$\begin{aligned} i \frac{\partial \Psi_1}{\partial t} &= \frac{\partial h}{\partial \Psi_k^*} = \xi (\bar{h}(a) - a \bar{h}'(a)) \Psi_1 \\ i \frac{\partial \Psi_2}{\partial t} &= \xi (\bar{h}(a) + (1-a) \bar{h}'(a)) \Psi_2 \end{aligned} \quad (11)$$

ただし、 $n$  と  $h$  が保存量であることを利用した。(11) は定常解  $\Psi_k = c_k \exp(-i\omega_k(a)t)$  ( $k = 1, 2$ ) をもち、その固有振動数は  $\omega_1(a) = \xi (\bar{h}(a) - a \bar{h}'(a))$ ,  $\omega_2(a) = \xi (\bar{h}(a) + (1-a) \bar{h}'(a))$  のように準位の占拠数 ( $a$ ) に依存した振動数を持つ。したがって、才差運動の振動数  $\Omega_0(a) \equiv \omega_2(a) - \omega_1(a) = \xi \bar{h}'(a)$  も占拠数依存性を示す。(ちなみに、通常の量子力学では、 $\bar{h}(a) = a$  そして  $\bar{h}'(a) = 1$  なので、 $\Omega_0(a) = \xi$ 。つまり、才差運動の振動数は占拠数とは独立な静的磁場の強さだけで決まる定数である。)

こういう状況下で横方向にプローブ (検索) としての振動磁場をパルス的にくりかえし作用させると、磁気共鳴吸収の振動数が、先立つプローブ磁場により確定した占拠数 ( $a$ ) に依存する値を持つ。その結果、測定するたびに磁気共鳴の振動数が変化することになる。実際、具体的に、摂動ハミルトニアン  $\Delta h = \frac{g}{2} \Psi^\dagger (\sigma_x + i\sigma_y) \Psi \exp(-i\Omega t) + \text{c.c.} = g \Psi_2^* \Psi_1 \exp(-i\Omega t) + \text{c.c.}$  を取り入れて磁気共鳴のダイナミクスを考察すると、振動数  $\Omega = \Omega_0(a)$  で吸収がおこる。(通常の量子力学では、磁気共鳴の振動数は静的磁場の大きさ  $\xi$  だけで決まる一定値。) この磁気共鳴の振

動数の変化は決定論的で、通常の量子力学のフレームのように測定に際して確率的な要素は入り込まない。

さて、ワインバーグの理論を発展させ、磁気共鳴におけるカオスの可能性を探ろう。回転座標系において、非線形量子ダイナミクスは以下のように与えられる

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_1}{\partial t} = \left( \frac{\Omega}{2} + \bar{h}(a) - \bar{h}'(a) a \right) \tilde{\psi}_1 + g \tilde{\psi}_2 \quad (12)$$

$$i \frac{\partial \tilde{\psi}_2}{\partial t} = \left( -\frac{\Omega}{2} + \bar{h}(a) + (1-a) \bar{h}'(a) \right) \tilde{\psi}_2 + g \tilde{\psi}_1 \quad (13)$$

ここで、

$$g = \begin{cases} 0 & \left( \text{for } kT < t < \left(k + \frac{1}{2}\right)T \right) \\ 1 & \left( \text{for } \left(k + \frac{1}{2}\right)T < t < (k+1)T \right) \end{cases} \quad (14)$$

とおくことで繰り返しパルス振動磁場を表してみよう。また

$$\bar{h}(a) = \frac{e^{\lambda a} - 1}{\lambda} \quad (15)$$

と定義し、 $\lambda$ の値を調節することで系が線形か非線形かを選択できるようにする。 $(\lambda \rightarrow 0 \text{ で } \bar{h}(a) = a, \text{つまり線形極限を表す。})$ このとき、回転座標系での方程式を数値的に解き、占拠数の時間変化、そのパワースペクトル、ポアンカレ断面を求めてみる。 $\lambda = 0$ および $\lambda = 1$ を線形極限および非線形領域の典型値として採用する。以下の図で、実線（赤）が線形極限、点線（青）が非線形領域のデータをあらわしている。

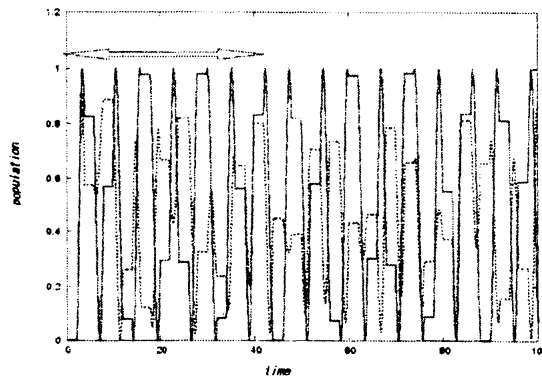


図 8: 占拠数の時間変化. 挿入の両手矢印は線形極限の場合の周期を表す。

まず、占拠数の時間変化は、線形極限で周期をもつ規則振動となるのに対し、非線形領域では周期を失い不規則振動を示している（図 8 参照）。次に、図 9 のパワースペクトルは、線形極限で、横振動外場の振動数  $\Omega$  とパルス磁場の周期に対

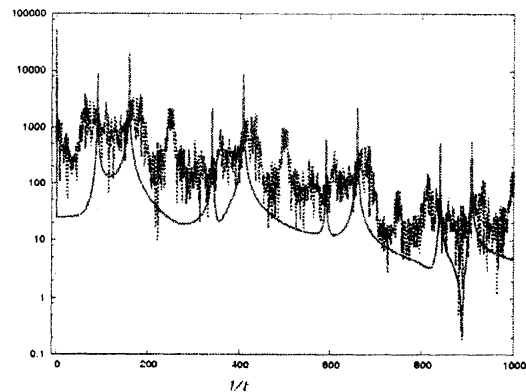


図 9: 時系列に対するパワースペクトル

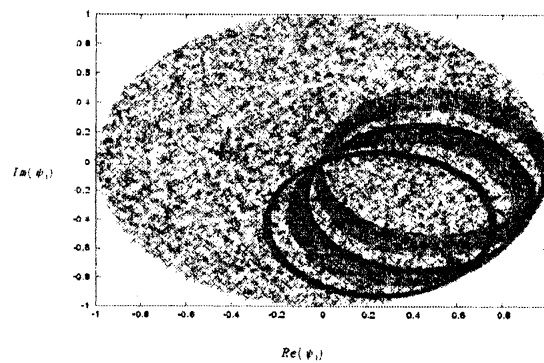


図 10: Poincare 断面 ((オンオフ磁場の) 1 周期毎のデータ)

応する振動数 ( $\frac{2\pi}{T}$ )、そしてそれらの高調波を特徴的に示す線スペクトルから成り立っている。それに対し、非線形領域では、特徴的な線スペクトルは見られず、カオスに固有の広がったスペクトルが現れている。

最後に、図 10 のポアンカレ断面では線形極限で、軌道がトーラスを描いているのに対し、非線形領域では、カオスの海が広がっている。

## 4 まとめと今後の課題

本稿の非線形シュレーディンガー方程式は正準量子化則に基礎を置き、ノルムを保存しガリレイ変換および同種粒子間の座標入れ替えに対して不変な形式を持っている。そこで、この非線形シュレーディンガー方程式を微視的量子論の基礎方程式とみなしてみた。適切な非線形項があると、波束は相互の衝突やビリアルード

壁との衝突に際して自己崩壊や拡散しない。また、2重スリットの考察からわかるように、スリットを通過後、波束の局在性が回復するので、測定時における波束の非決定論的収縮を回避できる。また、Tonomuraらの、電子銃を用いた1電子干渉の繰り返し実験の解釈に際し、電子の粒子性と波動性の矛盾やミステリーを強調する必要はなくなった。しかし、本稿で取り上げた非線形項は波動関数の「均一性」(Weinberg[1, 2])あるいは「スケール不変性」(Kibble[7])をやぶっている。「均一性」をやぶることのない非線形項の正しい導入については、別途記載する予定である。著者たちの最新の考察によると、たとえ、非線形項を導入しても、遷移確率や定常状態の量子輸送へ影響は小さい[11]。非線形量子力学では、単なるカオスの量子論的兆候ではなく正真正銘の量子カオスが生成する。しかし、線形性が破れ、重ね合わせの原理が成り立たないので量子コンピュータにおけるデコヒーレンス理論の再構築が必要となる。非線形量子力学の多体問題および場の理論への拡張は今後の大きな課題である。

## 参考文献

- [1] S. Weinberg, Phys. Rev. Lett. **62**, 485 (1989).
- [2] S. Weinberg, Ann. Phys. (N.Y.) **194**, 336 (1989).
- [3] J. Polchinski, Phys. Rev. Lett. **66**, 397 (1991).
- [4] 中村勝弘, 「量子カオスの現在と未来」, 小嶋泉 編: 『数理物理への誘い6』(遊星社, 2006) 203 ページ所収.
- [5] R. Omnes, Ann. Phys. (N.Y.) **201**, 354 (1990).
- [6] 増田俊平, 「量子力学における早送り問題」(大阪市立大学工学研究科博士論文, 2008年3月) .
- [7] T.W.B. Kibble, Commun. Math. Phys. **64**, 73 (1978).
- [8] I. Bialynicki-Birula and J. Mycielski, Ann. of Phys. **100**, 62 (1976).
- [9] K. Nakamura, N. Nakazono and T. Ando, J. Phys. Soc. Jpn. **74**, 2647 (2005).
- [10] B.G. Levi, Physics Today, **42**, 20 (1989).
- [11] K. Nakamura, A. Kohi, H. Yamasaki, V. M. Perez-Garcia and V. V. Konotop, Europhysics Lett. **80**, 50005 (2007).